Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Daniel Palacín

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie

Blatt 1

Abgabe: 05.11.2019, 14Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

a) Zeige, dass die Relation *elementare Unterstruktur zu sein* $\preceq$ zwischen Strukturen reflexiv und transitiv ist.

b) In der Sprache $\mathcal{L}$, sei nun $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine gerichtete Familie von $\mathcal{L}$-Unterstrukturen der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$ derart, dass $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{B}$, für i aus I. Zeige mit Hilfe von Tarskis Test, dass $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i \preceq \mathcal{B}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, welche ein einstelliges Prädikat P_n für jedes n in $\mathbb{N}$ enthält. Betrachte eine $\mathcal{L}$-Theorie T und eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x]$ derart, dass in jedem Modell $\mathcal{A}$ von T jede Realisierung a von φ in einem der Prädikate P_n liegt. Zeige, dass es ein N aus $\mathbb{N}$ gibt, so dass

$$T \models \forall x \left(\varphi[x] \rightarrow \bigvee_{n=1}^{N} P_n(x) \right).$$

Hinweis: DER Satz!

Aufgabe 3 (12 Punkte)**.**

Sei I eine (nicht-leere) Menge. Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf I ist eine nicht-leere Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(I)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $I \in \mathcal{F}$.
2. Für alle X und Y aus $\mathcal{F}$, liegt $X \cap Y$ aus in $\mathcal{F}$.
3. Falls X liegt in $\mathcal{F}$ und $X \subset Y$, dann liegt Y auch in $\mathcal{F}$.

a) Zeige, dass jeder beliebige Durchschnitt von Filtern wieder ein Filter ist. Ist die Vereinigung von Filtern wiederum ein Filter?

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(I)$ ist eine *Filterbasis*, falls kein endlicher Durschnitt von Elementen aus $\mathcal{B}$ leer ist. Ein *Ultrafilter* ist ein maximaler Filter.

b) Zeige, dass eine Filterbasis $\mathcal{B}$ einen Filter bestimmt, welcher von $\mathcal{B}$ erzeugt wird. Insbesondere, falls $\mathcal{B} = \{X\}$ für ein $X \subset I$, ist der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter ein *Hauptfilter*.

c) Zeige, dass jeder Filter in einem Ultrafilter enthalten ist. Ferner zeige, dass ein Ultrafilter genau dann ein Filter $\mathcal{F}$ ist, wenn er folgende Zusatzeigenschaft besitzt:

4. Wenn $X \cup Y$ in $\mathcal{F}$ liegt, dann liegt X oder Y in $\mathcal{Y}$.

(Bitte wenden!)

d) Wenn $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter mit Filterbasis $\mathcal{B} = \{X\}$ ist, für ein $X \subset I$, wie groß ist dann X? Für unendliche I sei $\mathcal{F}(I)$ die Kollektion aller koendlichen Teilmengen von I, das heißt,

$$\mathcal{F}(I) = \{X \subset I : I \setminus X \text{ ist endlich}\}.$$

Ziege, dass $\mathcal{F}(I)$ ein Filter ist. Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist genau dann kein Hauptfilter ist, wenn $\mathcal{U}$ den Filter $\mathcal{F}(I)$ enthält.

e) Falls die Menge I Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, zeige, dass ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ genau dann unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen ist, wenn $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter ist.

f) Gegeben einen Filter $\mathcal{F}$ auf I und eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von (nicht-leeren) Mengen, definiere folgende Relation auf $\prod_{i \in I} X_i$:

$$(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I} \quad \iff \quad \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}.$$

Zeige, dass $\sim_{\mathcal{U}}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.